

Treballs destacats de matemàtiques

Resum de tesis doctorals de les universitats catalanes

SERGIO BAENA MIRABETE

Tesi doctoral: *Avenços en l'anàlisi de sèries temporals categòriques amb aplicacions*, dirigida per Pere Puig Casado, llegida el 30 de setembre del 2020, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. (sergio.baena@uab.cat)



Molts mètodes estadístics s'han aplicat recentment en l'anàlisi de sèries temporals categòriques i discretes. Això posa de manifest la importància de desenvolupar noves tècniques per analitzar i modelitzar eficientment aquest tipus de dades. Una cadena de Markov d'ordre k és un model probabilístic molt utilitzat per descriure sèries de memòria curta. No obstant això, els models de Markov en el context de sèries temporals categòriques poden ser problemàtics pel fet que el nombre de paràmetres augmenta exponencialment amb l'ordre k . D'altra banda, l'interès per les sèries temporals de recompte ha augmentat ràpidament en els últims anys. En aquest sentit, el model clàssic INAR (1) és àmpliament utilitzat per analitzar sèries temporals de recompte. No obstant això, el càlcul de la funció de versemblança per a models INAR(p) de major ordre ($p > 1$) és qualificat com numèricament intractable en la literatura. De manera similar, l'anàlisi de sèries temporals definides en $\mathbb{Z}$ (incloent tant sencers positius com negatius) ha despertat també l'interès de molts investigadors. El càlcul eficient de les probabilitats de variables aleatòries de recompte així com d'aquelles definides en els enters és essencial per avaluar la funció de versemblança i ajustar aquests models. Diferents mètodes aproximats han estat proposats en la literatura [4]. Aquesta tesi doctoral té com a objectiu introduir noves tècniques i aplicacions rellevants per analitzar sèries temporals categòriques i

discretes. La conformen diferents publicacions on es presenten i es discuteixen en detall alguns mètodes innovadors al respecte.

Concretament, dos d'aquests articles [1, 2] proposen diversos models basats en cadenes de Markov i les seves mixtures, que són il·lustrats amb dues aplicacions rellevants. Específicament, en l'article [1], es presenten els models de curta-llarga persistència, aplicats a l'estudi de les migracions de ràtings municipals en l'àmbit del risc de crèdit. En l'article [2], es proposen, de forma parsimoniosa, models latents de Markov i mixtures de cadenes de Markov per analitzar seqüències de 'cara-creu' mentalment produïdes per un grup d'estudiants durant un experiment. En l'últim dels articles inclosos [3], derivem un conjunt de relacions de recurrència per al càlcul de les probabilitats d'una gran classe de variables aleatòries definides en els enters. Mostrem que la funció de probabilitat es pot calcular de forma recursiva per aquelles variables aleatòries on les seves funcions generatrius de probabilitat satisfan certa forma funcional. Aquestes recurrències són útils per al càlcul, de manera simple i eficient, de les probabilitats així com de la seva funció de versemblança corresponent. Es presenten alguns exemples d'aplicació mostrant l'eficiència del mètode.

Els mètodes presentats en aquesta tesi es poden veure com avenços petits però significatius

en aquests camps. Encara que aquest treball constitueix un avenç en aquestes aplicacions, s'han de seguir fent més esforços per millorar les tècniques i eines existents.

Referències

- [1] Baena-Mirabete, S. and Puig, P., “Parsimonious higher-order markov models for rating transitions”, *JRSS, A*. 181(1) (2018), p. 107–131.
- [2] Baena-Mirabete, S., Espinal, A. and Puig, P., “Exploring the randomness of mentally generated head–tail sequences”, *Statistical Modelling*. 20(3) (2019), p. 225–248.
- [3] Baena-Mirabete, S. and Puig, P., “Computing probabilities of integer-valued random variables by recurrence relations”, *Statistics and Probability Letters*. 161 (2020).
- [4] Pedeli, X., Davison, A. C. and Fokianos, K., “Likelihood estimation for the INAR(p) model by saddlepoint approximation”, *JASA*. 110(511) (2015), p. 1229–1238.

ADRIÁN HINOJOSA CALLEJA

Tesi doctoral: *Probabilitats d'impacte per als processos g -Gaussians*, dirigida per Marta Sanz i Solé, llegida el 7 d'abril del 2022, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. (hinojosa.a@gmail.com)



Les trajectòries dels processos estocàstics gaussians es caracteritzen per la seva irregularitat. Com a conseqüència d'aquest comportament, les imatges d'aquests processos són superfícies aleatòries amb característiques de tipus fractal. L'objectiu de la meua tesi va ser trobar estimacions superiors i inferiors de la probabilitat que aquestes superfícies intersectin un subconjunt en el espai.

Diem que un procés gaussià real avaluat X és g -gaussià en un conjunt compact $K \subset \mathbb{R}^d$, si existeix una funció no decreixent g , tal que

$$E(|u(x) - u(y)|^2) \asymp g^2(|x - y|), x, y \in K.$$

El resultat principal del treball estableix que si un camp aleatori

$$\{\mathbf{X}(x) = (X_1(x), \dots, X_D(x)), x \in K\},$$

les coordenades del qual són còpies independents i idènticament distribuïdes d'un procés g -gaussià, llavors típicament podem establir les següents acotacions de probabilitats d'estada,

$$c\text{Cap}_{q_g}(A) \leq P(\mathbf{X}(K) \cap A \neq \emptyset) \leq C\mathcal{H}_{q_g}(A),$$

on $q_g(\tau) = \tau^D (g^{-1}(\tau))^{-d}$. $\text{Cap}_{q_g}(A)$ i $\mathcal{H}_{q_g}(A)$ denoten la q_g -capacitat i la q_g -mesura de Hausdorff d'un borelià $A \in \mathbb{R}^D$, respectivament.

Finalment, apliquem aquest resultat, en processos gaussians que són solucions d'equacions diferencials parcials estocàstiques. Trobem estimacions de probabilitats d'estada per a les solucions de: la equació de Poisson conduïda per soroll blanc, l'equació de la calor conduïda per soroll fraccionari vermell i l'equació biharmònica de la calor conduïda per soroll blanc.



EDUARD VILALTA VILA

Tesi doctoral: *El problema del rang i la teoria de la dimensió per al semigrup de Cuntz*, dirigida per Francesc Perera Domènech, llegida el 21 de juny del 2022, en el programa de doctorat en Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. (eduard.vilalta@uab.cat)

Un invariant important en l'estudi i classificació de les C^* -àlgebres (àlgebres d'operadors acotats tancades per la norma i la involució) és l'anomenat semigrup de Cuntz. Aquest invariant, que assigna a cada C^* -àlgebra un monoide positivament ordenat, s'ha utilitzat amb èxit en nombroses ocasions. Tot i així, el semigrup de Cuntz continua essent un objecte misteriós, i molts problemes oberts en C^* -àlgebres estan relacionats amb propietats estructurals del monoide.

A la tesi s'estudien diversos aspectes del semigrup de Cuntz associat a una C^* -àlgebra, així com els anomenats semigrups de Cuntz abstractes. En particular, analitzem el problema del rang per la classe d'àlgebres AI separables, obtenint una caracterització completa.

També s'introdueix una noció de dimensió per semigrups de Cuntz abstractes, que en el cas

de funcions contínues sobre un espai topològic coincideix amb la dimensió usual de Lebesgue. Aquesta dimensió també es relaciona amb la dimensió nuclear d'una C^* -àlgebra, i es prova que ambdues coincideixen en casos significatius. Es presta especial atenció al cas zero dimensional, on es pot donar una caracterització d'aquests semigrups en termes de condicions de densitat d'uns elements privilegiats.

Finalment, s'introdueix la noció de C^* -àlgebres rarament disperses i es prova que és una classe molt àmplia, incloent-hi totes les àlgebres simples de dimensió infinita. Es donen diverses caracteritzacions d'aquest concepte, incloent-hi una descripció en termes de propietats de divisibilitat del semigrup de Cuntz. Aquesta noció està íntimament lligada a l'anomenat Problema Global de Glimm, que també s'analitza a la tesi, donant-ne una reformulació mitjançant condicions del semigrup de Cuntz.

GUILLEM BELDA-FERRÍN

Tesi doctoral: *Bisecció Conforme n -dimensional per refinament local de malles simplicials no estructurades*, dirigida per Xevi Roca i Eloi Ruiz-Gironés, llegida el 28 d'octubre del 2022, en el programa de doctorat en Matemàtiques Aplicades de la Universitat Politècnica de Catalunya. (guillembeldaferri@gmail.com)



En aplicacions adaptatives n -dimensionals, les malles simplicials conformes s'han de modificar localment. Una modificació local sistemàtica és dividir en dos els símplexos prescrits mentre que els símplexos adjacents es divideixen en dos per garantir la conformitat. Tot i que hi ha moltes estratègies de bisecció conforme, els especialistes prefereixen el mètode conegut com a *Newest Vertex Bisection* (NVB) [1]. Aquest mètode garanteix avantatges clau per a l'adaptabilitat sempre que la malla tingui una estructura anomenada reflectivitat. Malauradament, no se sap (i) com extreure una estructura de reflectivitat de qualsevol malla conforme no estructurada per a tres o més dimensions. Afortunadament, un mètode de bisecció conforme és adequat per a l'adaptabilitat si gairebé compleix els avantatges de NVB. Aquests avantatges gairebé es compleixen amb una estratègia multietapa existent en tres dimensions [2]. Tanmateix, no se sap (ii) com realitzar una bisecció multietapa per a més de tres dimensions.

Aquesta tesi pretén demostrar que la bisecció conforme n -dimensional és possible per al refinament local de malles conformes no estructurades. En primer lloc, proposa el primer mètode de dues etapes de 4 dimensions [3], que mostra que la bisecció de multietapa és possible més enllà de les tres dimensions. En segon lloc, seguint aquesta possibilitat, es proposa el primer mètode multietapa n -dimensional [4] i respon a la pregunta (ii). En tercer lloc, garanteix el primer mètode tridimensional que presenta els avantatges de NVB [5], demostrant que aquests avantatges són possibles més enllà de les dues dimensions. En quart lloc, ampliant, es garanteix el primer mètode de marcatge n -dimensional que extreu una estructura de reflectivitat de qualsevol malla conforme no estructurada i, per tant, respon a la pregunta (i). Aquesta resposta demostra que el refinament local amb NVB és possible en qualsevol dimensió. En cinquè lloc, es mostra que el mètode multietapa proposat gairebé compleix els avantatges de NVB. Finalment, per visualitzar

malles de quatre dimensions, proposa una eina senzilla per tallar malles pentatòpiques.

En conclusió, aquesta tesi demostra que la bisecció conforme és possible per al refinament local en dues o més dimensions. Amb aquesta finalitat, proposa dos mètodes nous per a malles conformes no estructurades, mètodes que permetran aplicacions adaptatives en geometria complexa n -dimensional.

Referències

- [1] J.M. Maubach. Local bisection refinement for n -simplicial grids generated by reflection. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(1):210–227, 1995.
- [2] D.N. Arnold, A. Mukherjee, L. Pouly. Locally adapted tetrahedral meshes using

bisection. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(2):431–448, 2000.

- [3] G. Belda-Ferrín, A. Gargallo-Peiró, X. Roca. Local Bisection for Conformal Refinement of Unstructured 4D Simplicial Meshes. In *27th Inter. Meshing Roundtable*, vol. 127, p. 229–247. Springer, 2019.
- [4] G. Belda-Ferrín, E. Ruiz-Gironés, A. Gargallo-Peiró, X. Roca. Conformal marked bisection for local refinement of n -dimensional unstructured simplicial meshes. *Computer-Aided Design*, 2022.
- [5] G. Belda-Ferrín, E. Ruiz-Gironés, X. Roca. Bisecting with optimal similarity bound on 3D unstructured conformal meshes. In *2022 SIAM International Meshing Roundtable (IMR)*. Zenodo, 2021.

MAR GIRALT MIRON

Tesi doctoral: *Fenòmens homoclínics i caòtics a L_3 en el problema restringit dels 3 cossos*, dirigida per Inma Baldomá Barraca i Marcel Guàrdia Munárriz, llegida el 25 de novembre del 2022, en el programa de doctorat en Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya. (mar.giralt-miron@unimi.it)



El problema restringit dels 3 cossos modela el moviment d'un cos de massa negligible que es troba sota la influència gravitatòria de dos cossos massius anomenats primaris. Si els primaris realitzen moviments circulars i el cos sense massa és coplanar amb ells, es té el problema restringit planar i circular dels 3 cossos (RPC3BP). En coordenades sinòdiques, és un sistema hamiltonià autònom de dos graus de llibertat i té cinc punts crítics, $L_1, \dots, L_5$, anomenats punts de Lagrange. El punt de Lagrange L_3 és un punt crític de tipus centre-sella, colineal amb els primaris i que es troba al cantó oposat del primari petit respecte del gran.

En aquesta tesi estudiem les varietats inestable i estable associades a L_3 i analitzem alguns dels fenòmens homoclínics i caòtics que les envolten. Primerament, obtenim una fórmula asimptòtica per a la distància entre les varietats inestable i estable de L_3 . Quan la ràtio entre les masses dels primaris és petita, els valors propis associats a L_3 tenen escales diferents; és a dir, el mòdul dels valors propis hiperbòlics és més petit que el dels el·líptics. Degut a

aquesta dinàmica de rotació ràpida, les varietats invariants de L_3 es troben exponencialment properes l'una de l'altre respecte a la ràtio de masses i les tècniques pertorbatives clàssiques no apliquen.

El segon resultat de la tesi estudia l'existència d'òrbites homoclíniques a L_3 de 2 voltes, és a dir, connexions que s'acosten dues vegades al punt crític. Més concretament, demostrem que existeixen connexions de 2 voltes per a una successió específica de valors de la ràtio de masses tendint a zero i obtenim una expressió asimptòtica per a aquesta successió.

A més, demostrem que existeix un conjunt d'òrbites periòdiques de Lyapunov les varietats inestables i estables de les quals es tallen transversalment. Aquest conjunt d'òrbites periòdiques de Lyapunov de L_3 té un nivell d'energia hamiltonià exponencialment proper al del punt crític L_3 . Per tant, segons el teorema homoclínic de Smale-Birkhoff, això implica l'existència de moviments caòtics (és a dir, d'una ferradura de Smale) en un entorn exponencialment proper de L_3 i les seves varietats invariants.